Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Ein Element $e \in R$ ist *idempotent* genau dann, wenn $e^2 = e$ ist (zum Beispiel sind 0 und 1 idempotent). Zeigen Sie:

a) Wenn e idempotent ist, dann ist auch $1 - e$ idempotent, und $e \cdot (1 - e) = 0$. (2 Punkte)

b) Ist e idempotent, dann sind die Ideale eR und $(1 - e)R$ relativ prim. (2 Punkte)

c) Genau dann ist R isomorph zu einem direkten Produkt von zwei Ringen, die beide keine Nullringe sind, wenn es in R ein idempotentes Element $e \notin \{0, 1\}$ gibt. (8 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei $P \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad $d \geq 3$, das mindestens eine Nullstelle $a \in \mathbb{R}$ und mindestens eine Nullstelle $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ hat. Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von P über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

a) Es gibt einen Automorphismus $\varphi \in \mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$ mit $\varphi(a) = b$. (2 Punkte)

b) Die komplexe Konjugation kann zu einem Automorphismus von L über $\mathbb{Q}$ eingeschränkt werden. (5 Punkte)

c) Die Galoisgruppe $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$ ist nicht abelsch. (5 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Es seien $p \geq 2$ eine natürliche Zahl, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $a_i \in \mathbb{N}_0$ für $1 \leq i \leq m$, so dass

$$p^n = \sum_{i=1}^{m} p^{a_i}$$

gilt. Zeigen Sie, dass $m - 1$ durch $p - 1$ teilbar ist. (4 Punkte)

Hinweis: Betrachten Sie Kongruenzen modulo $p - 1$.

b) Für eine Primzahl p und $n \in \mathbb{N}$ sei G eine Gruppe der Ordnung p^n, und

$$Z(G) = \{g \in G \mid xg = gx \text{ für alle } x \in G\}$$

sei das Zentrum von G. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Konjugationsklassen von G, die nicht in $Z(G)$ liegen, durch $p - 1$ teilbar ist. (8 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Es seien H eine Untergruppe der endlichen Gruppe G und P eine p-Sylowgruppe von G für eine Primzahl p, die die Ordnung von H teilt.

a) Zeigen Sie, dass es stets ein $g \in G$ gibt, so dass $H \cap g^{-1}Pg$ eine p-Sylowgruppe von H ist.
(6 Punkte)

b) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass $H \cap P$ nicht notwendig eine p-Sylowgruppe von H ist.
(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Die reelle (6×6)-Matrix A habe den sechsfachen Eigenwert 1 mit der geometrischen Vielfachheit 3. Es gelte weiterhin $A = E_6 + N$ mit der Einheitsmatrix E_6 und einer nilpotenten Matrix N mit Nilpotenzindex 3, d.h. $N^3 = 0$, aber $N^2 \neq 0$. Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A.
(12 Punkte)